Посилання на статтю

Чумаченко И.В. Обеспечение ресурсов оперативного планирования в условиях параметрической неопределенности / И.В. Чумаченко, В.М. Момот, Н.М. Федоренко // Управління проектами та розвиток виробництва: Зб.наук.пр. – Луганськ: вид-во СНУ ім. В.Даля, 2004. – № 3(11). – С.116-122. Режим доступу: http://www.pmdp.org.ua/

УДК 519.86

И.В. Чумаченко, В.М. Момот, Н.М. Федоренко

ОБЕСПЕЧЕНИЕ РЕСУРСОВ ОПЕРАТИВНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассмотрено решение задачи коррекции уровня вероятностной устойчивости оперативного планирования относительно целеуказания в условиях вариации параметров путем изменения запаса дефицитного ресурса. Ист.5.

Ключевые слова: задача линейного программирования, вариации параметров, целеуказание, вероятность, стратегия управления, устойчивость управления, целевая функция, статистические характеристики, дисперсия, математическое ожидание, метод выпуклого программирования, теорема Куна-Таккера.

І.В. Чумаченко, В.М. Момот, М.М. Федоренко

ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ РЕСУРСІВ ОПЕРАТИВНОГО ПЛАНУВАННЯ В УМОВАХ ПАРАМЕТРИЧНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Розглянуте вирішення завдання корекції рівня імовірнісної стійкості оперативного планування стосовно цільової вказівки в умовах варіацій параметрів шляхом зміни запасу дефіцитного ресурсу. Дж.5.

I.V. Chumachenko, V.M. Momot, N.M. Fedorenko

PROVIDING RESOURCES FOR OPERATIVE PLANNING IN CONDITIONS OF PARAMETERS VAGUENESS

The task solving of correction the level of probable firmness of operative planning concerning target indication in the conditions of parameters variation, changing supply of deficit resource, is considered.

Постановка проблемы. Функционирование современных предприятий связано с деятельностью в условиях различных неопределенностей. Одной из наиболее распространенных моделей оперативного управления предприятием является задача линейного программирования. В работах [1,2] рассмотрено решение задачи анализа стратегий оперативного управления в условиях вариаций параметров среды и выбора из них наилучшей, достигающей области заданных показателей функционирования предприятия, в предположении о невозможности перенастройки программы задания. Для этого предложено использовать вероятностный критерий вида $P\{Z \geq C\}$, как меры устойчивости оперативного управления предприятием с учетом возможных вариаций параметров среды относительно целеуказания $Z \geq C$. Однако в ряде случаев вероятность достижения целевой функцией минимального допустимого уровня ограничения в рамках реализации возможных стратегий мала. В этом случае необходимо пересмотреть установленные ограничения на величину допустимых параметров C или скорректировать величину запаса привлекаемых ресурсов.

Анализ последних достижений и публикаций. Классические исследования влияния изменений запасов ресурсов на оптимальное решение задачи линейного программирования позволяют судить об эффекте изменения объемов материально-сырьевых ресурсов лишь при локальных их изменениях и сосредоточены на получении предельно допустимых условий увеличения дефицитных ресурсов или уменьшения недефицитных ресурсов, при которых дефицитные ресурсы переходят в недефицитные и наоборот [3,4]. Однако полученные при этом предельно возможные величины дефицитных ресурсов, позволяющие улучшать оптимальное решение детерминированной задачи линейного программирования, не позволяют судить об изменении показателя вероятностной устойчивости относительно целеуказания, характеризующем функционирование организации в условиях параметрических возмущений и возможность коррекции этого показателя.

Цель работы. Таким образом, актуальным является разработка инструментальных средств оценки величины дополнительно привлекаемого ресурса, при котором производственная система достигает поставленной цели с учетом возможных вариаций параметров внешней среды.

Основной материал исследования. Задача выбора оптимальной производственной программы, представляющая собой задачу линейного программирования, заключается в максимизации прибыли предприятия от выпуска n видов продукции $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определяемой как $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, удовлетворяющей линейным ограничениям вида $AX \le B$ и условиям $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$. Здесь $A = (a_{ij}) -$ матрица размерности $m \times n$ представляет собой матрицу технологических коэффициентов, которая описывает объем материально-сырьевых ресурсов вида i, необходимых для выпуска одной единицы продукции вида j. $B = (b_i) -$ вектор-столбец размерности m, представляет собой матрицу запасов используемых материально-сырьевых ресурсов. Величины $c_j (\, j = 1, \ldots, n)$ представляют собой прибыль от выпуска и реализации единицы продукции вида j [1-4].

В силу действия рыночных механизмов, а также в силу нашей недостаточной информированности параметры задачи имеют отклонения относительно номинальных значений. Отклонения параметров задачи от плановых значений считаем случайными и независимыми друг от друга. Целевая функция, выраженная через параметры случайных независимых отклонений, является случайной величиной, имеющей нормальный закон распределения вероятности вследствие центральной предельной теоремы [5].

В этих условиях целью задачи оперативного планирования является выбор опорного плана задачи, обеспечивающего получение значения оптимизируемого критерия Z_l большего или равного минимальному допустимому (запланированному) уровню $Z_l \ge C_l$ с заданной вероятностью $P\{Z_l \ge C_l\} \ge P_l^*$ [1-2]. Здесь $P\{\Psi\} -$ вероятность выполнения условия Ψ.

Оценка $P\{Z_l \geq C_l\} \geq P_l^*$ выступает как мера устойчивости оперативного управления предприятием с учетом возможных вариаций параметров среды относительно целеуказания $Z_l \geq C_l$.

Вероятность достижения целевой функцией допустимого уровня может быть рассчитана в предположении о представлении вариации параметров задачи в виде $\alpha = \alpha_0 \pm \Delta\alpha$, где значения α_0 – характеризуют номинальные (невозмущенные) значения параметров, а $\Delta\alpha$ – величину параметрического разброса. Полагаем, что все входные параметрические возмущения задачи при этом определяются соотношением $\Delta\alpha = 3\sigma_\alpha$, где σ_α – среднеквадратичное отклонение параметра.

В случае нормального закона распределения показателя эффективности Z_l, вероятность попадания его величины в заданный интервал вещественной оси (a,b), рассчитывается с помощью формулы [1-2,5]:

$$P(a \prec Z_l \prec b) = \frac{1}{\sigma_l\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{\frac{-(Z_l-\nu_l)^2}{2\sigma_l^2}}\,dZ_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(a-\nu_l)/\sigma_l}^{(b-\nu_l)/\sigma_l} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt =$$
$$= \Phi((b-\nu_l)/\sigma_l) - \Phi((a-\nu_l)/\sigma_l),$$

где $\Phi(t)$ – интеграл вероятности;

ν_l, σ_l – соответственно математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение оцениваемого показателя Z_l;

$t = (Z_l - \nu_l)/\sigma_l$ и $dt = dZ_l / \sigma_l$.

В качестве математического ожидания показателя ν_l будем использовать значение критерия оптимизации, соответствующее значениям опорного плана стратегии $x_1, x_2, \ldots, x_n$ для номинальных параметров задачи. В случае варьирования параметров целевой функции при неизменных значениях других групп параметров задачи величина дисперсии критерия оптимизации σ_l с учетом правила композиции нормальных законов распределения [5] и некоррелированности между собой показателей удельной прибыльности может быть определена по формуле $\sigma_l = \sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_{c_j^l}^2$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – объем выпускаемой продукции соответствующего ассортимента, определяемый рассматриваемой стратегией с номинальными параметрами; $\sigma_{c_j^l}^2$ – дисперсия показателя удельной прибыльности c_j^l. В случае коррелированности параметров удельной прибыльности расчетная формула имеет вид:

$\sigma_l = \sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_{c_j^l}^2 + 2\sum_i \sum_j x_i x_j \operatorname{cov}(c_i^l, c_j^l)$, где $cov(c_i^l, c_j^l)$ – коэффициент ковариации коэффициентов c_i^l и c_j^l.

Пусть минимальному допустимому уровню вероятности выполнения условия $P\{Z_l \geq C_l\} = P_l^*$ соответствует уровень безразмерного аргумента t_{p_l}, т.е. $P_l^* = \Phi(t_{p_l})$. Последнее условие эквивалентно выполнению условия $(C_l - \nu_l)/\sigma_{f_l} = t_{p_l}$. С учетом допущения о том, что величины разброса всех параметров представимы в виде $\Delta\alpha = 3\sigma_\alpha$, исходное условие $P\{Z_l \geq C_l\} \geq P_l^*$ можно переписать в виде $3\left(C_l - \sum_{j=1}^{n} c_j^l x_j\right) / \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\Delta_j^l c_j^l x_j\right)^2}\right) \leq t_{p_l}$. Данное условие определяет линию заданного уровня вероятности P_l^* выполнения критерия $Z_l \geq C_l$. Очевидно, что выполнение данного условия определено величинами ограничения уровня целевой функции C_l, коэффициентами удельной прибыльности c_j^l и опорным планом задачи $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Изменение коэффициентов удельной прибыльности связано с повышением цены на изделия и возможно только в незначительной мере, что обусловлено действием рыночных механизмов в условиях конкуренции. Возможное увеличение цены может также отразиться и на уменьшении объемов продаж продукции. Уменьшение величины дисперсии целевой функции невозможно. Данная величина является неуправляемой. Ее величина связана также с действием рыночных механизмов. Таким образом, реальное управление уровнем вероятностной устойчивости возможно только за счет изменения объемов производства продукции, что в свою очередь связано с изменением запасов необходимых ресурсов.

Ограничения на ресурсы линейной модели делятся на связывающие (активные) ограничения и не связывающие (неактивные). Ресурс, соответствующий связывающему ограничению, является дефицитным ресурсом, так как он используется полностью. Ресурс, соответствующий не связывающему ограничению, является недефицитным ресурсом, так как он имеется в избытке. Анализировать влияние увеличения недефицитных ресурсов не имеет смысла, поскольку в этом случае и без того избыточный ресурс становится еще более избыточным, что никак не скажется на полученном ранее решении.

Поэтому будем исследовать влияние изменения запасов только дефицитных ресурсов. Изменим значение k–го дефицитного ресурса на величину $\Delta b_k (m \geq k \geq 1)$. В этом случае исходная задача описывается системой ограничений $AX \leq B + \Delta B$, где $\Delta B = (\Delta b_k)$ – вектор-столбец размерности m, представляющий собой матрицу изменений запасов используемых материально-сырьевых ресурсов, состоящую из элементов $\Delta b_i = 0$ для $i \neq k, (i = 1, \ldots, m)$ и элемента $\Delta b_k \neq 0$. Величина Δb_k

является неизвестной. Введем в рассмотрение новый вектор $X^1 = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ размерности $n+1$, образованный из вектора $X = (x_1, \dots, x_n)$ и элемента $x_{n+1} = \Delta b_k$, характеризующего дополнительные запасы k–го ресурса для обеспечения требуемого уровня вероятностной устойчивости задачи оперативного планирования относительно целеуказания. С учетом введенного вектора X^1 систему исходных ограничений задачи перепишем в виде $A^1 X^1 \le B$, где $A^1 = \left(a_{ir}{}^1\right)$– матрица размерности $m \times (n+1)$ представляет собой новую матрицу, описывающую объем требуемых материально-сырьевых ресурсов.

Определим минимальный дополнительный запас ресурса Δb_k, необходимого для обеспечения заданного уровня вероятностной устойчивости. При этом исходную задачу сформулируем в виде:

Найти $min\, x_{n+1}$ в области допустимого множества решений, ограниченного линиями $\sum_{i=1}^{m} a_{ir}{}^1 x_r{}^1 \le b_i \quad (i = 1, \dots, m; r = 1, \dots, n+1)$ при условиях $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \ge 0$ и условии выполнения ограничения

$$3\left(C_l - \sum_{j=1}^{n} c_j^l x_j\right) / \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\Delta_j^l c_j^l x_j\right)^2}\right) \le t_{p_l}, \ (j = 1, \dots, n).$$

Данная задача имеет вид стандартной задачи нелинейного программирования. Для ее решения могут быть использованы соответствующие методы. Применим для решения задачи метод выпуклого программирования [4], приведя для этого все условия к виду: $g_k(X^1) \le 0, \ \ k = 1, \dots, m+1; \ \ x_r \ge 0,$ $r = 1, \dots, n+1$, где все функции $g_k(X^1)$, выпуклы по $X^1 = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$. Если функции $g_k(X^1)$ дифференцируемы и выпуклы по X^1, то вектор является оптимальным решением задачи оптимизации тогда и только тогда, когда существует такой вектор множителей Лагранжа $\Lambda_0 = \{\lambda_{k0}\}$, что для полученных значений $\{X_{0,}\Lambda_0\}$ будут выполняться условия Куна-Таккера.

Функция Лагранжа для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$L(X^1, \Lambda) = x_{n+1} + \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k g_k(X^1).$$

Необходимые и достаточные условия оптимальности получим в следующем виде:

$$\frac{\partial L(X_0, \Lambda_0)}{\partial x_i} \ge 0; \ \frac{\partial L(X_0, \Lambda_0)}{\partial x_i} x_i^0 = 0; \ (i = 1, \dots, n+1);$$

$$\frac{\partial L(X_0,\Lambda_0)}{\partial \lambda_j} = g_i(X) \le 0; \; \frac{\partial L(X_0,\Lambda_0)}{\partial \lambda_j}\lambda_j^0 = 0; \; (j = 1,\ldots,m+1).$$

Совместное решение X^{1*},Λ^* системы приведенных уравнений и неравенств определяет величину минимального дополнительного запаса ресурса $\Delta b_k = x_{n+1}$ и параметры соответствующей оптимальной производственной программы $x_1,..,x_n$.

При решении задач привлечения ресурсов или инвестиций, что характерно для большинства экономических задач, возникает задача выбора предпочтения ресурсов при вложении дополнительных средств. Для этого введем показатели эффективности дополнительной единицы ресурса j-го вида, которые можно найти по формуле

$$I_j = \frac{\Delta P_j}{\Delta b_j} \text{ или } I_j^* = \frac{\Delta P_j}{C_{b_j}\Delta b_j},$$

где $\Delta P_j -$ приращение значения вероятности устойчивости относительно целеуказания;

$\Delta b_j -$ необходимое изменение запаса ресурса;

$C_{b_j} -$ стоимость единицы запаса ресурса b_j.

Рассмотрим применение предлагаемой методики на примере.

Пусть рассматривается задача выбора оптимальной производственной программы предприятия, задаваемая в виде системы ограничений:

$$\begin{cases} 2x + y \le 21000; \\ x + 2y \le 15000; \\ x + y \le 15000; \\ x \ge 0; y \ge 0. \end{cases}$$

Требуется получить параметры эффективной стратегии управления (т.е. его производственную программу), максимизирующие доход предприятия от реализации продукции. Целевая функция при этом имеет вид $f = 2.5x + 2y$.

Решаем симплекс-методом исходную детерминированную систему и находим оптимальное решение $x^* = 9000$, $y^* = 3000$, $f^{max} = 28500$. Предполагаем, что параметры целевой функции задачи оперативного планирования могут отклониться на заданном интервале планирования на 10% от номинальных значений. Уровень ограничения на величину дохода с учетом возможных разбросов соответственно составляет $C = 28000$, а желаемый уровень вероятности выполнения ограничения на величину дохода $P^* = 0.89$. Таким образом, при номинальных значениях параметров задачи величина дохода соответствует заданному уровню ограничения. Рассчитаем вероятность выполнения ограничения к величине дохода в условиях вариации параметров задачи. Оценка вероятности, выполненная по предлагаемой методике, показала, что в рамках заданных исходных данных вероятность устойчивости управления относительно вариаций параметров целевой функции для стратегии, задаваемой величинами $x^* = 9000$ и $y^* = 3000$ изделий составляет $P\left\{f^* \geq C\right\} = 0.74$. То есть полученное детерминированное оптимальное решение не удовлетворяет уровню вероятностного ограничения. Определим величину минимальных дополнительных привлекаемых запасов ресурсов, необходимых для выполнения вероятностного ограничения. Применив предложенную методику поиска, получим следующие решения. В случае увеличения запасов первого ресурса на величину $\Delta b_1 = 510$, оптимальная программа выпуска будет $x_1 = 9340$ и $y_1 = 2830$ изделий. При этом величина $P\left\{f_1^* \geq C\right\} = 0.8944$. В случае увеличения запасов второго ресурса на величину $\Delta b_2 = 910$, оптимальная программа будет $x_2 = 8696.66$ и $y_1 = 3606.66$ изделий. При этом величина вероятностного критерия будет также $P\left\{f_2^* \geq C\right\} = 0.8944$. То есть привлечение дополнительных запасов ресурсов Δb_1 или Δb_2 обеспечивает выполнение одного и того же уровня вероятности. Для выбора эффективной стратегии будем использовать показатель удельной стоимости величины ресурсов $C_{b_1} = 1.5$ у.е./ед. и $C_{b_2} = 1.2$ у.е./ед. Поскольку увеличение запаса второго ресурса требует дополнительно затрат на 1092 у.е., в то время как привлечение первого ресурса требует только 765 у.е., то можно сделать вывод о большей целесообразности дополнительного привлечения первого ресурса.

Выводы. В статье рассмотрена методика получения величины минимального дополнительно привлекаемого ресурса задачи оперативного планирования в условиях параметрической неопределенности для получения заданного уровня вероятностной устойчивости задачи. Предложенный подход основан на сведении исходной стохастической задачи к детерминированной задаче выпуклого программирования. Использование предлагаемого подхода для выбора стратегии оперативного планирования позволит улучшить эффективность функционирования организации с учетом возможных параметрических возмущений.

Перспективы дальнейших разработок в данном направлении. За пределами материала данной работы остались вопросы разработки методов решения задачи оперативного планирования в условиях параметрической неопределенности по критерию вероятностной устойчивости с учетом требования целочисленности решения. Данный вопрос будут освещен в других работах авторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Момот В.М. Вероятностная устойчивость задачи оперативного планирования // Моделювання та інформаційні технології. – К.: НАНУ, ІПМЕ. – 2003. – Вип. 22. – С. 121-127.
2. Чумаченко И.В., Момот В.М. Определение эффективных стратегий управления в условиях параметрической неопределенности // Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова. – К.: НАНУ, ІПМЕ. – 2003. – Вип. 22. – С. 121-127.
3. Фомин Г.П. Методы и модели линейного программирования коммерческой деятельности. – М.: финансы и статистика, 2000. – 128 с.
4. Косоруков О.А., Мищенко А.В. Исследование операций. – М.: Издательство «Экзамен», 2003. – 448 с.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Высшая школа, 2000. – 479 с.

Стаття надійшла до редакції 25.07.2004 р.